Grado en Física

Examen de Cálculo I - Convocatoria de febrero 2014

Soluciones

Ejercicio 1.

a) (1 punto) Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1,1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1,1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c) = \dfrac{1}{4}(c^3 + 3c)$.

b) (1 punto) Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica que $\operatorname{sen} x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$.

Solución. a) Sea $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{4}(x^3 + 3x)$. Como f es continua también g es continua en el intervalo $[-1,1]$. Tenemos que probar que hay algún $c \in [-1,1]$ tal que $g(c) = 0$. Tenemos que $g(-1) = f(-1) + 1 \geqslant 0$ y $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. O bien alguno de los números $g(-1)$ y $g(1)$ es igual a cero, en cuyo caso $c = -1$ o $c = 1$, o bien $g(-1) > 0$ y $g(1) < 0$, en cuyo caso el teorema de Bolzano implica que g se anula en algún punto $c \in]-1,1[$.

b) Definamos $f : [0.\pi/2] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{2}{\pi} x$. Se trata de probar que $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [0, \pi/2]$. Como la función f es continua en $[0, \pi/2]$, sabemos, por el teorema de valores máximos y mínimos de Weierstrass, que f alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en $[0, \pi/2]$. Como $f(0) = 0 = f(\pi/2)$, se trata de probar que f alcanza su mínimo absoluto en los extremos del intervalo. Como f es una función derivable sabemos que los extremos absolutos de f en $[0, \pi/2]$ han de alcanzarse o bien en los extremos de dicho intervalo o en puntos del intervalo $]0, \pi/2[$ en los que la derivada se anule.

Tenemos que $f'(x) = \cos x - 2/\pi$. Como la función coseno es continua en $[0, \pi/2]$, $\cos(0) = 1$ y $\cos(\pi/2) = 0$, por del teorema del valor intermedio, existe un punto $x_0 \in]0, \pi/2[$ tal que $\cos(x_0) = 2/\pi$. Dicho punto x_0 es necesariamente único porque la función coseno es estrictamente decreciente en $[0, \pi/2]$. Hemos probado que en el intervalo $]0, \pi/2[$ la derivada f' se anula en un único punto x_0. Por tanto, la derivada f' no puede cambiar de signo en los intervalos $[0, x_0[$ y $]x_0, \pi/2]$. Como $f'(0) = 1 - 2/\pi > 0$ y $f'(\pi/2) = -2/\pi < 0$, deducimos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in [0, x_0[$, y $f'(x) < 0$ para todo $x \in]x_0, \pi/2]$. Por tanto f es estrictamente creciente en $[0, x_0]$ y estrictamente decreciente en $[x_0, \pi/2]$. En consecuencia, el máximo absoluto de f en el intervalo $[0, \pi/2]$ se alcanza en x_0. Por tanto, el mínimo absoluto de f en $[0, \pi/2]$ tiene que alcanzarse en los extremos. ☺

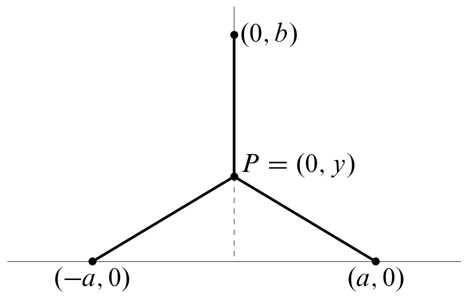
Comentarios. La primera parte de este ejercicio no se ha entendido. Muchos afirman que $f(x) = \dfrac{1}{4}(x^3 + 3x)$ y que para $c = 0$ se tiene que $f(0) = 0$. Otros usan derivadas o el teorema de Rolle. El enunciado está claro: lo único que se sabe de la función f es que es continua, está definida en $[-1,1]$ y $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1,1]$. Como no se dice que f es derivable no pueden usarse derivadas. ¿Sabes lo que es una hipótesis? Pues eso. Es de extrema ingenuidad creer que con los datos que se dan puede determinarse la función f. Por ejemplo, las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} x)$, $f(x) = x^3$, $f(x) = e^{x-1}$, $f(x) = 1/2$ que se suponen definidas en el intervalo $[-1,1]$ verifican todas ellas la desigualdad $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1,1]$. Pero hay muchísimas más, infinitas. Lo que se pide en el ejercicio no es determinar la función f, cosa imposible, sino probar que la gráfica de f y la de la función $g(x) = \dfrac{1}{4}(x^3 + 3x)$ se cortan en un punto. ¿Dos curvas que se cortan en un punto coinciden? Está claro que no. Pues muchos afirmáis que sí. En clase hicimos el mismo ejercicio pero con c^3 en lugar de $\frac{1}{4}(c^3 + 3c)$. ¡Gran diferencia!

La segunda parte de esta ejercicio puede hacerse de varias formas, Por ejemplo, una vez visto que la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{2}{\pi}x$ se anula en un único punto $x_0 = \arccos(2/\pi) \in]0, \pi/2[$, como $f'(0) = 1 - 2/\pi > 0$ y $f'(pi/2) = -2/\pi < 0$, se sigue que para $0 \leqslant x < x_0$ es $f'(x) > 0$ y por tanto f es estrictamente creciente en $[0, x_0]$ luego $f(0) = 0 \leqslant f(x)$ para todo $x \in [0, x_0]$. Y para $x_0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ es $f'(x) < 0$ y por tanto f es estrictamente decreciente en $[x_0, \pi/2]$ luego $f(\pi/2) = 0 \leqslant f(x)$ para todo $x \in [x_0, \pi/2]$.

También puede razonarse como sigue: ya que f' se anula en un único punto en el intervalo $[0, \pi/2]$ se deduce, por el teorema de Rolle, que f no puede tener más de dos ceros en dicho intervalo, pero $f(0) = f(\pi/2) = 0$, por tanto, f no puede anularse en $]0, \pi/2[$ y, como es continua, por el teorema de Bolzano debe ser siempre positiva o siempre negativa en $]0, \pi/2[$. Como $f(\pi/4) = 1/\sqrt{2} - 2/\pi > 0$ deducimos que $f(x) > 0$ para todo $x \in]0, \pi/2[$. Este ejercicio se hizo en clase también está resuelto en mi libro de Cálculo. ☹

Ejercicio 2. (2 puntos)

Dos fábricas están situadas en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ y en $(0, b)$ hay una central eléctrica. Calcula el punto $P = (0, y)$ para que la longitud total del tendido eléctrico desde la central a las fábricas sea mínimo. Debes discutir el resultado según los valores de a y de b.



Solución. Para cada $y \in [0, b]$ la distancia total del tendido eléctrico viene dada por $b - y + 2\sqrt{a^2 + y^2}$. Definamos $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ por $f(y) = b - y + 2\sqrt{a^2 + y^2}$. Se trata de calcular el mínimo absoluto de f en $[0, b]$. Tenemos que

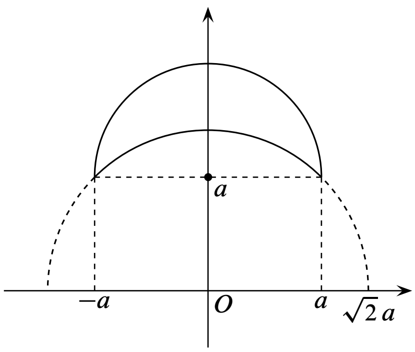
$$f'(y) = -1 + \frac{2y}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{-\sqrt{a^2 + y^2} + 2y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Fácilmente obtenemos que $y_0 = a/\sqrt{3}$ es el único punto positivo en el que se anula f'. Además $f'(y) < 0$ para $0 \leqslant y < y_0$ y $f'(y) > 0$ para $y_0 < y$. Por tanto f es estrictamente decreciente en $[0, y_0]$ y estrictamente creciente en $[y_0, +\infty[$. Deducimos que si $0 < y_0 < b$, es decir, si $a < b\sqrt{3}$, entonces el mínimo absoluto de f en $[0, b]$ se alcanza en y_0. Si $b \leqslant y_0$, es decir, si $a \geqslant b\sqrt{3}$, entonces el mínimo absoluto de f en $[0, b]$ se alcanza en b. ☺

Comentarios. Este ejercicio es un regalito. El planteamiento es sencillo y directo, los cálculos inmediatos y la discusión elemental. Pues muchos os empeñáis en complicarlo interpretando que a o b son variables y derivando respecto de alguna de ellas. Elemental sentido común dice que lo único que se sabe de a y b es que son constantes positivas. Y, algo que ya advertí en su momento, pero que vuelve a darse, es que no hay que pasarse de listo y, sin comprobar nada, hacer afirmaciones relativas al signo de la derivada. Claro está, como el punto crítico es único y tiene que ser un mínimo entonces la derivada tiene que ser negativa a su izquierda y positiva a la derecha. Bien, pues compruébalo. Para ello basta evaluar la derivada en un punto a la izquierda y en otro a la derecha del único punto crítico. Pocos hacéis bien este ejercicio que valía dos puntitos. Lo dicho, un regalito. Alguno hace este ejercicio usando el teorema de Weierstrass de valores máximos y mínimos para afirmar que el mínimo absoluto de f en $[0,b]$ se alcanzará o bien en 0 o en b o en $a/\sqrt{3}$. Razonando de esta forma nos ahorramos estudiar el signo de la derivada y la monotonía de f pero en cambio debemos compara los valores $f(0)$, $f(b)$ y $f(a/\sqrt{3}$ para decidir cuál es el menor y, claro está, hay que considerar cuándo $a/\sqrt{3}$ está en $[0,b]$. No es esa la mejor forma de hacer este ejercicio. ☹

Ejercicio 3. (2 puntos)

Sea $a>0$. Calcula usando técnicas de integración el área de la luna formada por la parte del círculo $x^2+(y-a)^2=a^2$ que es exterior al círculo $x^2+y^2=2a^2$. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar dicha luna alrededor del eje de abscisas.



Solución. La parte superior de la circunferencia $x^2+(y-a)^2=a^2$ viene dada por $y=a+\sqrt{a^2-x^2}$. El área pedida, S, viene dada por la integral:

$$S=\int_{-a}^{a}\left(a+\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{2a^2-x^2}\right)\,\mathrm{d}x=2a^2+\frac{\pi}{2}a^2-\int_{-a}^{a}\sqrt{2a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Donde hemos usado que $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}a^2$ porque es el área de un semicírculo de radio a. Todo lo que hay que hacer es calcular la integral restante. Tenemos:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{2a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}a\,\mathrm{sen}\,t\to\ \mathrm{d}x=\sqrt{2}a\cos t\,\mathrm{d}t\\ -a=\sqrt{2}a\,\mathrm{sen}\,t_0\to t_0=-\pi/4\\ a=\sqrt{2}a\,\mathrm{sen}\,t_1\to t_1=\pi/4\end{array}\right]=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2a^2-2a^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\,\sqrt{2}a\cos t\,\mathrm{d}t=$$

$$=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,t}\,\cos t\,\mathrm{d}t=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}|\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t=$$

$$=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=2a^2\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2t)\right]_{t=-\frac{\pi}{4}}^{t=\frac{\pi}{4}}=a^2\frac{\pi}{2}+a^2$$

Donde hemos tenido en cuenta que para $t\in[-\pi/4,\pi/4]$ se tiene que $\cos t>0$. Concluimos que $S=a^2$.

El volumen pedido, V, usando el método de los discos o arandelas, viene dado por la integral:

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left(\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(\sqrt{2a^2-x^2}\right)^2\right)\,\mathrm{d}x=2a\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=a^3\pi^2$$

☺

Comentarios. El área que se pide es tan fácil de calcular directamente que por eso en el enunciado del ejercicio se dice *"Calcula usando técnicas de integración"*. La gran dificultad es que la mayoría no sabéis hacer un cambio de variable en una integral definida, aunque se trate del más corriente de todos. Y aunque se haya hecho en clase. Una dificultad adicional para algunos es despejar y en función de x en la ecuación de la circunferencia $x^2+(y-a)^2=a^2$. Algunos creen que la y significa lo mismo en las ecuaciones de las dos circunferencias. Pues no, porque no son la misma circunferencia. ☹

Ejercicio 4. a) (1 punto) Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series:

$$\text{i)}\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}; \qquad \text{ii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}2^n$$

b) (0,5 puntos) Calcula el límite de la sucesión: $x_n=\dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

c) (0,5 puntos) Calcula el límite: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2-2\cos x}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)$.

Solución. a)-i) Para estudiar la convergencia absoluta de la serie en i) consideramos la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2}{n^3+1}$. Puesto que:

$$\frac{n^2}{n^3+1}\geqslant\frac{n^2}{2n^3}=\frac{1}{2}\frac{1}{n}$$

y la serie armónica $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ sabemos que es divergente, concluimos, por el criterio de comparación para series de términos positivos, que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2}{n^3+1}$ es divergente. Por tanto, la serie en i) no converge absolutamente. Seguidamente, como se trata de una serie alternada, aplicaremos el criterio de Leibniz para estudiar la convergencia no absoluta. Pongamos $a_n=\dfrac{n^2}{n^3+1}$. Claramente $\lim\{a_n\}=0$. Veamos si la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. Tenemos:

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+1}\leqslant\frac{n^2}{n^3+1}\iff (n+1)^2(n^3+1)\leqslant n^2((n+1)^3+1)\iff 1+2n\leqslant n^2+2n^3+n^4$$

Como evidentemente la última desigualdad se verifica para todo $n\in\mathbb{N}$, concluimos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y, por el criterio de Leibniz, se sigue que la serie es convergente.

a)-ii) Se trata de una serie de términos positivos. Para estudiar su convergencia usaremos el criterio del cociente. Pongamos $a_n=\dfrac{(3n)!}{(5n)^{3n}}2^n$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(3(n+1))!}{(5(n+1))^{3(n+1)}}2^{n+1}\frac{(5n)^{3n}}{(3n)!}2^{-n}=2\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(5n+5)^3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3n}\to 2\frac{27}{125}\frac{1}{\mathrm{e}^3}<1$$

Luego la serie es convergente.

b) Tenemos que $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ donde $a_n = \ln(n!)$ y $b_n = \ln(n^n) = n \ln n$. Como $\{b_n\}$ es estrictamente creciente y divergente aplicaremos el criterio de Stolz. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n}=\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)+n\ln(n+1)-n\ln n}=\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)+\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$$

Como $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$, se sigue que $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \to 1$. Poniendo $z_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)+z_n}=\frac{1}{1+\dfrac{z_n}{\ln(n+1)}}\to 1$$

Concluimos, por el criterio de Stolz, que $\lim \dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} = 1$.

c) Tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2-2\cos x}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x-2+2\cos x}{(2-2\cos x)\operatorname{sen}^2 x}$$

El límite es una indeterminación del tipo $0/0$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Pero antes de derivar usaremos las equivalencias asintóticas $\operatorname{sen} x \sim x$ y $2-2\cos x \sim x^2$ válidas cuando $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x-2+2\cos x}{(2-2\cos x)\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x-2\operatorname{sen} x}{4x^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)-2\operatorname{sen} x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)-2\cos x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen} x}{12x}=-\frac{1}{4}$$

Donde hemos aplicado la regla de L'Hôpital tres veces. ☺

Comentarios. En las series hay disparates de todo tipo. Demasiado variados para recogerlos aquí todos. Hay quien cree que si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ entonces la serie converge a L. Varios afirman que si el término general $\{a_n\}$ converge a cero entonces la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente. Claro, la serie armónica, $\sum \frac{1}{n}$, como es bien sabido, es convergente. Para algunos el criterio de Leibniz es un criterio de convergencia absoluta. Hay quien afirma que $\frac{n^2}{n^3+1}$ no converge a cero. Con respecto a la sucesión, se repite, cómo no, el típico error con logaritmos que consiste en afirmar que un cociente de logaritmos es igual al logaritmo de la diferencia, aunque hay otras variantes del mismo error. El límite es un regalito. Algunos siguen empeñados en hacer sustituciones por equivalencias asintóticas en sumas. Quizás necesiten dos cursos para aprender que eso no puede hacerse.

Ejercicio 5. (2 puntos) Dado $t > 0$, sea $V(t)$ el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)(x^2+2x+2)}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant t)$$

Calcula $V(t)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$.

Solución. El volumen pedido viene dado por la integral:

$$V(t) = \pi \int_0^t \frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$$

Se trata de una integral de una función racional por lo que haremos la descomposición en fracciones simples. Como el trinomio x^2+2x+2 tiene discriminante negativo pondremos:

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2}$$

Multiplicando por $(x+1)(x^2+2x+2)$ obtenemos:

$$x = A(x^2+2x+2) + (Mx+N)(x+1)$$

Haciendo $x=-1$ resulta $A=-1$. Haciendo $x=0$ resulta $0=2A+N$ por lo que $N=2$. Identificando coeficientes en x^2 resulta $0=A+M$ por lo que $M=1$. Por tanto:

$$\frac{V(t)}{\pi} = -\int_0^t \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^t \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = -\ln(1+t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x + \int_0^t \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\ln(1+t) + \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2) - \frac{1}{2}\ln 2 + \int_0^t \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\ln(1+t) + \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2) - \frac{1}{2}\ln 2 + \operatorname{arc\,tg}(t+1) - \frac{\pi}{4}$$

Para calcular el límite de $V(t)$ para $t\to+\infty$ debemos agrupar los logaritmos de forma conveniente. Tenemos:

$$\frac{V(t)}{\pi} = -\ln(1+t) + \ln\sqrt{t^2+2t+2} - \frac{1}{2}\ln 2 + \operatorname{arc\,tg}(t+1) - \frac{\pi}{4} = \ln\frac{\sqrt{t^2+2t+2}}{t+1} - \frac{1}{2}\ln 2 + \operatorname{arc\,tg}(t+1) - \frac{\pi}{4}$$

Deducimos que $\dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{t\to+\infty} V(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$. Luego $V(t) = \dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{\pi}{2}\ln 2$. ☺

Comentarios. Es un ejercicio muy parecido, casi igual, a otros que se han puesto en anteriores exámenes y que debéis conocer porque están en archivos que he subido al SWAD. Con sus soluciones. Hicimos un ejercicio parecido en clase. No tiene ninguna dificultad. Los cálculos son de lo más fácil que se puede poner. A pesar de que en el examen dije que el límite que se pide es finito algunos se empeñan en que no.

Ejercicio 6. Sea la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$.

a) (0,5 puntos) Calcula el radio de convergencia y estudia la convergencia de la serie en los extremos del intervalo de convergencia.

b) (1 punto) Calcula, usando el teorema de derivación de series de potencias, la función suma de la serie.

c) (0,5 puntos) Calcula $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}$.

Solución. a) Aplicamos el criterio del cociente para estudiar la convergencia absoluta. Pongamos $a_n = \dfrac{1}{2n+1}|x|^{2n+1}$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+3}|x|^2 \to |x|^2$$

Por tanto, si $|x|^2 < 1$, es decir, $|x| < 1$, la serie converge absolutamente. Si $|x| > 1$ el criterio del cociente nos dice que la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero por lo que la serie dada no es convergente. Por tanto, el radio de convergencia es 1.

Para $x = 1$ tenemos la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n+1}$ que no converge porque:

$$\frac{1}{2n+1} \geqslant \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}$$

y la serie armónica $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ es divergente. Para $x = -1$ resulta la serie opuesta de la anterior que, claro está, tampoco converge.

b) Definimos la función suma de la serie $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (-1 < x < 1)$$

Sabemos que dicha función es derivable en el intervalo $]-1,1[$ y que su derivada se calcula derivando término a término la serie:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2} \qquad (-1 < x < 1)$$

Conociendo la derivada podemos recuperar f por integración. Sea $x \in]-1,1[$. Tenemos:

$$f(x) - f(0) = f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Se trata de una integral racional. Como $1 - t^2 = (1+t)(1-t)$, pondremos:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} \Rightarrow 1 = A(1-t) + B(1+t) \Rightarrow A = B = 1/2$$

Luego

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) \qquad (-1 < x < 1)$$

c) Haciendo $x = 1/2$ tenemos:

$$f(1/2) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\frac{1}{4^n}$$

Luego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\frac{1}{4^n} = \ln 3.$ ☺

Comentarios. Este ejercicio no lo ha hecho nadie completo. Se hizo uno en clase algo más complicado pero muy parecido. Llama la atención que varios afirman que la serie en el apartado c) no converge o que su suma es cero. ¿Cómo puede ser cero la suma de una serie de términos estrictamente positivos?. ☹